2023 제2회 미적확통컵 풀이

Official Solution

by

미적확통컵 출제진 및 검수진

2023년 12월 23일

문제		의도한 난이도	출제자
CA	하루 피부과	**Easy**	haru_101
CB	ESC	**Easy**	wapas
CC	$\sqrt{f(x)}$	**Hard**	bubbler
CD	결혼식이 끝나고	**Hard**	invrtd_h
CE	조화 함수	**Hard**	puppy
CF	다항함수의 미분과 나머지	**Hard**	parkky
PA	자동차 주차	**Easy**	haru_101
PB	가중치 복권	**Medium**	saywoo
PC	주사위 던지기	**Hard**	pjshwa
PD	문자열 제작	**Hard**	eric00513
PE	최고의 크리스마스트리	**Hard**	invrtd_h
PF	지도에 얼룩과 잉크를 더하며	**Challenging**	ibm2006

CA. 하루 피부과

`math, calculus`
출제진 의도 – **Easy**

- 제출 317번, 정답 238명 (정답률 82.019%)
- 처음 푼 사람: **riroan**, 1분
- 출제자: `haru_101`

- 레이저의 세기를 나타내는 $\int_{x_1}^{x_2}\{f(x)-g(x)\}dx$ 는 다음과 같이 정리할 수 있습니다.

$$\int_{x_1}^{x_2}\{ax^2+bx+c-(dx+e)\}dx=\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}(b-d)x^2+(c-e)x\Big|_{x_1}^{x_2}$$
$$=\frac{1}{3}a(x_2-x_1)^3-\frac{1}{2}(b-d)(x_2-x_1)^2+(c-e)(x_2-x_1)$$

- 따라서 위 식에 x_1, x_2, a, b, c, d, e 의 값을 대입해 적분값을 $\mathcal{O}(1)$ 에 쉽게 해결할 수 있습니다.

CB. ESC

dp
출제진 의도 – **Easy**

- 제출 153번, 정답 120명 (정답률 87.582%)
- 처음 푼 사람: **ncy09**, 4분
- 출제자: wapas

- $a_0 = b_0 = 0$ 이고 $c_0 = 1$ 입니다.
- $e^x \sin^2(x)$ 를 ES, $e^x \cos^2(x)$ 를 EC, $e^x \sin(x)\cos(x)$ 를 ESC 라고 정의합니다.
- 각 함수를 미분한 결과를 관찰합니다.
  - ES 를 미분한 결과는 $ES + 2ESC$ 입니다.
  - EC 를 미분한 결과는 $EC - 2ESC$ 입니다.
  - ESC 를 미분한 결과는 $-ES + EC + ESC$ 입니다.
- 따라서 $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ 과 a_n, b_n, c_n 의 관계식을 이끌어 낼 수 있습니다.
  - $a_n = a_{n-1} - c_{n-1}$
  - $b_n = b_{n-1} + c_{n-1}$
  - $c_n = 2a_{n-1} - 2b_{n-1} + c_{n-1}$

- 그러므로 a_n 을 $DP[n][0]$, b_n 을 $DP[n][1]$, c_n 을 $DP[n][2]$ 라 할 때 다음 DP 점화식을 정의할 수 있습니다.
  - $DP[n][0] = DP[n-1][0] - DP[n-1][2]$
  - $DP[n][1] = DP[n-1][1] + DP[n-1][2]$
  - $DP[n][2] = 2DP[n-1][0] - 2DP[n-1][1] + DP[n-1][2]$
- 따라서 $DP[N][0]$ + $DP[N][1]$ + $DP[N][2]$ 의 값을 시간 복잡도 $O(N)$ 안에 구할 수 있습니다.

CC. $\sqrt{f(x)}$

`bruteforcing`
출제진 의도 – **Hard**

- 제출 57번, 정답 9명 (정답률 15.789%)
- 처음 푼 사람: **kes0716**, 53분
- 출제자: `bubbler`

- 먼저 $g(x)$의 차수 m을 계산합니다. $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$으로 두었을 때, $f(x) = g(g(x)) = b_m(b_m x^m + \cdots)^m + \cdots$ 이므로 $g(g(x))$의 차수는 m^2입니다. 따라서 n이 제곱수일 때 $m = \sqrt{n}$이고, 아닌 경우에는 g가 존재하지 않습니다.
- 이제 b_m을 계산해 봅시다. $g(g(x))$의 m^2차 항의 계수는 b_m에만 영향을 받음을 관찰할 수 있고, 계수의 범위가 크지 않으므로 범위 내에서 b_m의 값을 대입해서 m^2차 항의 계수가 맞는지 확인해보면 가능한 b_m의 값의 후보를 알 수 있습니다.
- 이때 b_m의 후보는 최대 2가지가 될 수 있음에 유의합니다.

- 각각의 b_m 의 값을 가정했을 때, $b_{m-1}, \cdots, b_1$ 을 다음과 같은 방법으로 순서대로 구할 수 있습니다.
  - $g(g(x)) = b_m g(x)^m + b_{m-1} g(x)^{m-1} + \cdots$ 에서 $m(m-1)$ 차를 초과하는 항의 계수는 맨 앞의 $b_m g(x)^m$ 에만 영향을 받고, 더 나아가 $m(m-1)+i$ $(1 \le i \le m)$ 차 항의 계수는 $b_m, b_{m-1}, \cdots, b_i$ 의 값에만 영향을 받음을 알 수 있습니다.
  - 또한 $m(m-1)+i$ 차 항의 계수를 b_i 에 대한 함수로 보면 일차식이 되는데, 이는 $g(x)^m$ 에서 x 의 지수 i 를 두 번 이상 골라서 $x^{m(m-1)+i}$ 를 만들 수 없기 때문입니다.
  - 따라서 이 시점에서 b_i 의 가능한 값의 후보는 최대 1개이며, 이는 일차방정식을 세울 수도 있지만 b_i 에 모든 가능한 값을 대입하고 $g(g(x))$ 또는 $b_m g(x)^m$ 을 전개해서 원하는 항의 계수를 보는 것으로도 구할 수 있습니다.

- $b_m, b_{m-1}, \cdots, b_1$ 을 알면 b_0 는 역시 가능한 값을 대입하여 $g(g(x))$ 를 전개해서 다항식 전체가 맞는지 확인하면 됩니다.

CD. 결혼식이 끝나고

`calculus`
출제진 의도 – **Hard**

- 제출 10번, 정답 8명 (정답률 80.000%)
- 처음 푼 사람: **kes0716**, 84분
- 출제자: `invrtd_h`

- 케이크의 전체 부피는 $V = \int_{x_1}^{x_n} \pi f(x)^2 dx$ 입니다.
- 함수 $F(x) = \int_{x_1}^{x} \pi f(t)^2 dt$ 를 정의합시다.
- 케이크를 자르는 위치(x 좌표)를 각각 $z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}$ 라 하면, $F(z_i) = \frac{V \times i}{m}$ 가 성립합니다.
- 함수 F 는 역함수를 가지므로, 이 식은 $z_i = F^{-1}\left(\frac{V \times i}{m}\right)$ 와 같습니다.

위치 z_i 에서 케이크를 자를 때 사용하는 힘의 크기는 $f(z_i)^2$ 이므로, 힘의 크기들의 평균은 다음과 같이 계산됩니다.

$$\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1} f(z_i)^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1} f\left(F^{-1}\left(\frac{V\times i}{m}\right)\right)^2$$

- 주어진 식은 $i=1$ 부터 $i=m-1$ 까지의 평균 꼴인데, m 이 무한대로 간다면 이것을 0 부터 $m-1$ 까지의 평균 꼴로 바꾸어 쓸 수 있습니다. 이를 증명해봅시다.
- t 이 무한대로 가면 $\frac{1}{m-1}$ 은 $\frac{1}{m}$ 으로 바꾸어 써도 됩니다.
- 한편 $i=0$ 일 때에 해당하는 항 $\frac{1}{m} \times f\left(x_1\right)^2$ 을 더해도, 이 식의 극한값은 0 이기 때문에 전체 극한값은 달라지지 않습니다.

  따라서 구분구적법을 적용할 수 있습니다. 그 결과는 다음과 같습니다.

$$\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f\left(F^{-1}\left(\frac{V \times i}{m}\right)\right)^2 = \int_0^1 f\left(F^{-1}\left(Vz\right)\right)^2 dz$$

이 식을 계산해 봅시다.

- 치환 $Vz = u$에 의해, 주어진 식은 $\frac{1}{V}\int_0^V f\left(F^{-1}(u)\right)^2 du$와 같습니다.
- 치환 $u = F(v)$에 의해, 주어진 식은 $\frac{1}{V}\int_{x_1}^{x_n} f(v)^2 \times \pi f(v)^2 dv$와 같습니다.
- 따라서 문제의 정답은 $\frac{\int_{x_1}^{x_n} f(v)^4 dv}{\int_{x_1}^{x_n} f(v)^2 dv}$입니다.
- 분자와 분모의 적분을 계산하는 프로그램을 만들면 됩니다. 시간복잡도는 $\mathcal{O}(N)$입니다.

CE. 조화 함수

`math, case_work`
출제진 의도 – **Hard**

- 제출 23번, 정답 4명 (정답률 17.391%)
- 처음 푼 사람: **cki86201**, 137분
- 출제자: puppy

- 증명의 양이 상당히 깁니다. 자세한 증명은 모두 생략하고, 중요한 관찰 위주로 나열하겠습니다.
- $f(x)$ 에서 $g(x)$ 로 바꾸는 것이 가능할 경우, $g(x)$ 에서 반대로 $f(x)$ 로 바꿀 수도 있습니다. 이때 두 함수를 '도달 가능한 관계'라 하겠습니다.
- $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 도달 가능한 관계이고, $g(x)$ 와 $h(x)$ 가 도달 가능한 관계이면, $f(x)$ 와 $h(x)$ 도 도달 가능한 관계입니다.
- 모든 상수 함수끼리는 도달 가능한 관계입니다.
- 상수함수가 아닌 두 함수가 조화를 아룬다면 두 함수의 차수는 같습니다.

- $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 3 이상의 홀수이면 $f(x)$와 $g(x)$가 조화를 이룰 필요충분조건은 $f(x) = g(x)$입니다. 증명이 자명하지 않으니 시도해보셔도 좋을 것 같습니다.
- $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 1이면 $f(x)$와 $g(x)$가 조화를 이룰 필요충분조건은 $f(x)$와 $g(x)$의 일차항의 계수가 같은 것입니다.
- $f(x)$가 상수 함수들과 도달 가능한 관계일 필요충분조건은 $f'(x) = 0$의 실근이 존재하는 것입니다. 역시 증명이 자명하지 않습니다.

- 위 관찰을 기반으로 답을 구할 수 있습니다. 총 5개의 경우가 생깁니다.
- $f'(x) = 0$의 근과 $g'(x) = 0$의 근이 모두 존재하면, 답은 YES입니다.
- 둘 중 하나의 근만 존재하면, 답은 NO입니다.
- 두 근 모두 존재하지 않고, $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 다르면, 답은 NO입니다.
- 두 근 모두 존재하지 않고, $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같으며, 그 값이 3 이상의 홀수라면, 답이 YES일 필요충분조건은 $f(x) = g(x)$입니다.
- 두 근 모두 존재하지 않고, $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같으며, 그 값이 1이라면, 답이 YES일 필요충분조건은 $f(x)$와 $g(x)$의 일차항의 계수가 같은 것입니다.

CF. 다항함수의 미분과 나머지

`math`, `calculus`, `segtree`, `number_theory`, `modular_multiplicative_inverse`, `extended_euclidean`

출제진 의도 – **Medium**

- 제출 17번, 정답 2명 (정답률 11.765%)
- 처음 푼 사람: **ncy09**, 225분
- 출제자: `parkky`

- $f(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i t^i$ 를 k 번 미분하면 $f^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i i^{\underline{k}} t^{i-k}$ 입니다.
- 여기서 $i^{\underline{k}} = i \cdot (i-1) \cdot \cdots \cdot (i-k+1)$ 는 하강 계승(falling factorial)입니다.
- $i^{\underline{k}} \bmod m$ 의 값들은 세그먼트 트리를 이용하여 빠르게 구할 수 있습니다.
- $f^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{d} r_j t^j$ 와 $r_j \bmod m = s_j$ 를 이용하여, 계수를 비교해 봅시다.

- $c_i i^{\underline{k}} \equiv s_{i-k} \pmod m$ 꼴의 일차합동식들을 풀어야 합니다.
- 일차합동식의 풀이는 모듈러 곱셈 역원 또는 확장 유클리드 알고리즘 등을 이용할 수 있습니다.
- c_i 의 범위, 인덱스 범위 등에 유의하세요.
- 각 c_i 들은 독립적으로 선택할 수 있으므로, 집합 A 는 곱집합 꼴로 표현됩니다.
- 따라서 A 의 크기와 A 의 최소 원소를 간단히 구할 수 있습니다.

PA. 자동차 주차

`math, combinatorics`
출제진 의도 – **Easy**

- 제출 253번, 정답 203팀 (정답률 81.818%)
- 처음 푼 사람: **mj1000j**, 0분
- 출제자: `haru_101`

- 이 문제에서는 빨간색 자동차, 초록색 자동차, 파란색 자동차가 색깔만 다를 뿐 차종이 같기 때문에 같은 것이 있는 순열 공식을 사용해야 합니다.
- 같은 것이 있는 순열 공식은 서로 같은 것끼리 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 개 있다고 할 때, 이것들을 한 줄로 나열하는 경우의 수는 다음과 같이 정의됩니다.

$$\frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)!}{x_1! x_2! \cdots x_n!}$$

PB. 가중치 복권

`bruteforcing, combinatorics`
출제진 의도 – **Medium**

- 제출 133번, 정답 35명 (정답률 26.316%)
- 처음 푼 사람: **golazcc83**, 12분
- 출제자: saywoo

- P_i 를 하루를 포함한 M 명의 사람들이 숫자 i 를 고른 횟수의 합이라고 하겠습니다.
- 그리고 하루가 선택한 3 개의 숫자를 각각 a, b, c 라고 하겠습니다.
- 한 번의 추첨에서 a, b, c 가 당첨될 확률은 $P = \dfrac{P_a + P_b + P_c}{3M}$ 입니다.
- 복권에서 당첨이 될 확률은 $(1 - P)^K \times P$ 입니다.

- $N \leq 100$ 이므로, 하루가 숫자 3 개를 선택할 수 있는 모든 경우를 $O(N^3)$ 으로 조사해보며 당첨될 확률이 가장 높은 경우를 찾을 수 있습니다.

PC. 주사위 던지기

`statistics`, `dp`
출제진 의도 – **Medium**

- 제출 55번, 정답 15팀 (정답률 27.273%)
- 처음 푼 팀: **index**, 26분
- 출제자: `pjshwa`

- **중심 극한 정리**란, 동일한 확률분포를 가진 독립 확률 변수 n 개의 합의 분포는 n 이 적당히 크다면 정규분포에 가까워진다는 정리입니다. 수식으로 표현하면 아래와 같습니다.

$$S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

- 이 정리를 문제의 상황에 대입해볼 수 있을까요? 같은 주사위를 M 회 던진 뒤 그 눈의 합에 대해 묻고 있으므로, M 이 적당히 크다면 이 눈의 합에 대한 확률변수를 정규분포에 근사시키는 방법을 생각해 볼 수 있을 것입니다.

- 쿼리는 구체적으로 1 부터 x 까지 정수에 대해 해당 정수가 눈의 합으로 나올 확률의 합을 묻고 있습니다.
- 눈의 합을 확률변수 S_M 으로 표현하면, 이 확률변수를 정규분포로 근사시킨다고 했을 때 $N(M\mu, M\sigma^2)$ 분포에서 $P(x \leq S_M)$ 값을 구하면 될 것입니다. 여기서 정규분포의 parameter는 아래와 같이 계산할 수 있습니다.

$$\mu = \frac{\sum iA_i}{\sum A_i},\ \sigma^2 = \frac{\sum (i-\mu)^2 A_i}{\sum A_i}$$

- 정규분포의 누적밀도함수($\Phi(x)$)를 구현하는 가장 쉬운 방법은 대부분의 언어에 내장되어 있는 오차 함수(erf)를 이용하는 것입니다. 아래는 $N(M\mu, M\sigma^2)$의 누적밀도함수를 구현하는 방법입니다.

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \text{erf}\left(\frac{x - M\mu}{\sqrt{2M\sigma^2}}\right)\right]$$

- Berry-Esseen Theorem에 의해 정규분포 근사값과 실제 값과의 차이가 $O(\frac{1}{\sqrt{M}})$ 임이 알려져 있습니다. 따라서 M이 작을 경우 문제에서 허용하는 오차(0.1)보다 차이가 크게 날 수도 있습니다.
  - M이 작을 때는 $O(N^2M^2)$의 냅색 DP로 답을 구하면 됩니다.

PD. 문자열 제작

`combinatorics, number_theory`
출제진 의도 – **Hard**

- 제출 38번, 정답 28명 (정답률 73.684%)
- 처음 푼 사람: **pk661**, 18분
- 출제자: `eric00513`

- 길이 N의 문자열에 A가 x번 등장하는 경우의 수를 $f(x)$라고 합시다.
- 우선 N개의 문자 중 x개를 골라서 A로 만들고, 나머지는 무작위로 채우면 되므로 $f(x) = \binom{N}{x} \cdot 25^{N-x}$입니다.
- 가장 긴 공통 A-부분수열의 길이가 M이라는 것은 S_1에 있는 A의 개수와 S_2에 있는 A의 개수 중 최솟값이 M임을 의미합니다.
- 따라서 정답은 $\{f(M)\}^2 + \sum_{i=M+1}^{N} f(i)f(M) + \sum_{i=M+1}^{N} f(M)f(i)$입니다.
- 팩토리얼과 25의 거듭제곱들을 미리 구해두고 분할정복을 이용한 거듭제곱으로 모듈로 곱셈 역원을 계산하면 $f(M), f(M+1), \cdots, f(N)$을 빠르게 전처리할 수 있습니다.

PE. 최고의 크리스마스트리

`combinatorics`, `tree_dp`, `dfs`
출제진 의도 – **Hard**

- 제출 14번, 정답 8명 (정답률 57.143%)
- 처음 푼 사람: **cki86201**, 63분
- 출제자: `invrtd_h`

- 루트가 한 개로 정해져 있을 때 문제를 푸는 것은 비교적 쉽습니다.
- 루트에 가장 예쁘지 않은 장식을 할당한 뒤, 모든 서브트리마다 정점 X 개의 서브트리에 X 개의 장식을 할당해 주고, 이를 재귀적으로 처리하면 됩니다.
- 이를 공식화하면 다음과 같습니다.

$$f(T) = \binom{\#T - 1}{\#T_1} \times f(T_1) \times \binom{\#T - \#T_1 - 1}{\#T_2} \times f(T_2) \times \cdots$$

- 이때 $\binom{n}{k}$ 는 이항 계수 ${}_nC_k$ 입니다.

- 이항 계수 $\binom{n}{k}$ 를 구하기 위해서는 공식 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 를 사용하면 됩니다. 약간의 전처리 이후에 이 값을 $\mathcal{O}(1)$ 에 빠르게 구하는 방법은 백준 13977 등의 문제에 잘 알려져 있습니다.
- 따라서 루트가 한 개일 때 문제를 푸는 시간복잡도는 (전처리) + $\mathcal{O}(N)$ 입니다.
- 루트가 바뀔 때 문제를 푸는 시간복잡도는 (전처리) + $\mathcal{O}(NQ)$ 입니다.

더 빠르게 할 수 있을까요?

- 편의상 Q에 들어오는 값이 항상 $1, 2, \cdots, n$으로 정해진다고 가정해도 문제가 없습니다.
  중복되는 쿼리는 메모이제이션 후 바로 대답하면 되기 때문입니다.
- 따라서 목표를 모든 정점에 대해 문제의 정답을 구하는 것으로 잡아 봅시다.

- 핵심 아이디어는 중복되는 계산을 줄여서 문제를 푸는 것입니다.
- 이를 위해, 함수 $f(v, w)$를 (정점 v와 연결된 다른 정점 w에 대하여, v와 w를 잇는 간선을 잘랐을 때 생기는 두 서브트리 중 정점 v가 있는 쪽만 남기고, v를 루트로 한 트리에 예쁘게 장식을 할당하는 경우의 수)라 정의합시다.
- 단, 편의상 w는 NULL일 수도 있으며 이때는 트리 전체를 생각한다고 가정합시다. 즉 우리가 구하고자 하는 값은 모든 v에 대하여 $f(v, \mathrm{NULL})$입니다.

$f'($$)$

일단 루트 하나에 대해 문제를 풀었다고 합시다. 이 정보를 이용해서 다른 정점이 루트가 되었을 때 문제를 빠르게 풀 수 있을까요?

- 함수 $s(v, w)$를 (정점 v와 연결된 다른 정점 w에 대하여, v와 w를 잇는 간선을 잘랐을 때 생기는 두 서브트리 중 정점 v가 있는 곳만 남겼을 때 서브트리의 크기)로 정의합시다.
- 이때, 다음 관찰이 성립합니다.

관찰

v와 w가 인접하다면, 다음 공식이 성립한다.

$$f(v, \text{NULL}) = f(v, w) \times f(w, v) \times \binom{N-1}{s(w, v)}$$

증명

- 맨 처음에 주어졌던 다음 공식으로부터 쉽게 유도할 수 있습니다.

$$f(T) = \binom{\#T - 1}{\#T_1} \times f(T_1) \times \binom{\#T - \#T_1 - 1}{\#T_2} \times f(T_2) \times \cdots$$

- 다른 방법도 있습니다. 위 공식을 구하는 방법과 비슷하게 생각하되, 맨 처음에 가장 예쁘지 않은 장식을 루트에 할당하는 과정을 하지 말고, w 쪽의 서브트리에 $s(w, v)$ 개의 장식을 (순서를 고려하지 않고) 할당하는 것부터 먼저 진행합시다. 이때 w 쪽의 서브트리에 가장 예쁘지 않은 장식이 할당되면 안 되므로, 그 경우의 수는 $\binom{N-1}{s(w,v)}$ 입니다. 이후 양쪽 트리를 재귀적으로 처리해 주면 됩니다.

- 다시 현재 상황으로 돌아옵시다. 일단 루트 하나에 대해 문제가 풀려 있고, 이 루트를 편의상 r 이라 합시다.
- 루트와 인접한 정점 하나를 골라 u 라 합시다. 그렇다면 우리가 r 과 u 에 대해 알고 있는 정보는...
  1. $f(r, \mathrm{NULL})$ 을 알고 있습니다.
  2. 재귀적으로 $f(u, r)$ 을 알고 있습니다.

  따라서 위의 <관찰>에 의해 $f(r, u)$ 를 알 수 있습니다!

- 이뿐만이 아닙니다. 다시 계산해보면 $f(u, r)$을 알고 $f(r, u)$를 알면 위의 <관찰>에 의해 $f(u, \mathrm{NULL})$을 알 수도 있습니다!
- 따라서 우리는 정점 하나에 대해 문제를 풀었으면 그와 인접한 정점에 대해서 $\mathcal{O}(1)$ 시간 안에 문제를 풀 수 있습니다.
- 이 과정을 식을 통해 정리해 보면 다음과 같습니다.

$$f(v, \text{NULL}) = f(v, w) \times f(w, v) \times \binom{N-1}{s(w, v)}$$

$$f(w, \text{NULL}) = f(w, v) \times f(v, w) \times \binom{N-1}{s(v, w)}$$

$$\frac{f(w, \text{NULL})}{f(v, \text{NULL})} = \frac{\binom{N-1}{s(v,w)}}{\binom{N-1}{s(w,v)}}$$

- DFS 등을 통해 이웃한 정점으로 계속 움직여 주며 문제를 풀면 됩니다.
- $s(v, w)$ 의 값은 트리 DP를 통해 전처리하면 빠른 시간에 구할 수 있습니다.

PF. 지도에 얼룩과 잉크를 더하며

`ad_hoc, constructive`
출제진 의도 – **Challenging**

- 제출 1번, 정답 0명 (정답률 0.000%)
- 처음 푼 팀: -, -분
- 출제자: `ibm2006`

크기가 50×50인 문제를 풀기 이전에, 200×200과 80×80에 대해 먼저 문제를 풀어봅시다.

2×2판에 있는 모든 격자칸에 대해, 해당 격자칸이 얼룩으로 칠해지지 않았다면 종착지까지 도달할 수 있는 경우의 수는 2입니다.

✓ 즉, 어떤 부분 2×2 판에 대해, 해당 판으로 들어오는 다른 경로가 없고, 해당 판의 모든 격자칸이 얼룩으로 칠해지지 않았다면, 오른쪽 위 칸에 도달할 수 있는 경우의 수는 왼쪽 아래 칸에 도달할 수 있는 경우의 수의 두배입니다.

따라서, 전체 경우의 수가X 인 격자판을 만들 수 있다면, 조금만 크기를 늘려서 $2X$ 인 격자판도 만들 수 있습니다.

전체 경우의 수가 X인 격자판이 있을 때, $X+1$인 격자판도 만들 수 있을까요? 가능합니다. 맨 처음 시작하는 칸에서 정확히 전체 경우의 수가 1인 칸을 적당히 가져올 수 있습니다. 따라서 X 격자판이 X를 출력했을 때, 해당 값을 전달하는 경로에 1을 더해줄 수 있습니다. 따라서 $X+1$을 만들 수 있습니다.

- X를 만들 수 있다고 할 때, $X+1$과 $2X$를 만들 수 있으므로 지수적인 효율로 원하는 값이 나오는 격자판을 만들 수 있습니다. 다만, 너무 단순하게 짜면 200번 내에 채우기 어려울 수도 있으나 디테일은 적당히 채울 수 있습니다.

위의 풀이만으로는 80×80으로 문제를 풀기 어렵습니다. 2×60이 80보다 꽤 크기 때문입니다. 사실, 그렇기 때문에 X에서 $2X$를 만드는 방법을 계속 쓰는건 힘듭니다. 다른 방법이 있을까요?

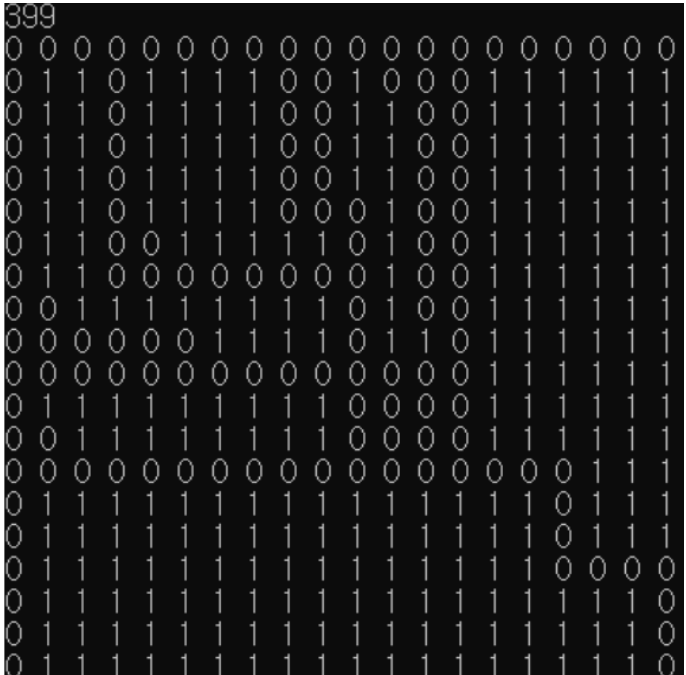
2×2 부분판을 생각하는 대신, 3×3 부분판을 생각해봅시다. 이 경우에는 가로폭 3, 세로폭 3을 투자해서 한 값을 $6X$ 로 바꿔줄 수 있습니다. 남은 것은 $X+1, x+2, \ldots, X+5$ 를 만드는 것입니다. 이것이 가능하다면, 주어진 k 를 6진법으로 나타내준 뒤에, 각 자릿수에 따라 구성을 해줄 수 있습니다.

어떤 칸에 원하는 수를 더해주는 방법을 생각해봅시다. 만약 전체 판의 맨 아래쪽 행을 전부 잉크를 뿌리지 않는다면, 각 칸들로 가는 가짓수는 1입니다. 또한, 두 개의 가로로 인접하였으며 가짓수가 1인 칸에 대해서, 그 위로 a칸을 쌓으면 마지막 칸으로 가는 가짓수는 $a-1$이 됩니다. 따라서, 해당 방식으로 원하는 수를 만든 다음에 원하는 경로에 이어붙여주면 됩니다. 최소 6칸정도는 쌓을 여유를 남겨야 하고, 6을 한번 곱하는데에 3의 길이가 필요하므로 대략적으로 계산해보면 $6+3\times 18log_6(10)$이 되고, 실제로 계산해보면 75 근처이므로 80×80으로 문제를 풀 수 있습니다. 이제 50×50만 해결하면 됩니다.

위에서 보았던 것처럼, $a \times a$ 부분판으로 특정 값을 곱하는 것은 굉장히 효과적인 전략입니다. 물론 a가 커지면 커질수록 점점 더 효율적이겠지만, 이 경우 상수를 더하는 부분을 처리하는 것이 까다로우며, 그 자체로 많은 부분을 차지하기 때문에 $a = 4$인 경우로 전체 문제를 해결하겠습니다.

이 경우, X 를 $20X$ 로 바꿀 수 있습니다. 실제로 간단한 계산을 해보면, $5 \times 18 \times log_6(10)$ 은 대략 46에서 47입니다. 그런데, 상수를 더해주는 부분을 만들기 위해서 필요한 부분을 단순하게 만들 경우에 크기가 3을 가뿐히 넘겨버리므로, 추가적인 최적화를 할 아이디어를 생각해야 합니다.

- 다양한 방식으로 최적화를 할 수 있을 것으로 추정되지만, 한 가지 방법은 1행과 1열로부터 동시에 $X + a$ 를 만드는 것입니다. 글만으로 해당 풀이를 자세하기 묘사하기는 굉장히 어렵기 때문에, 정해의 일부를 찍어서 보여드리겠습니다.



$f'(\text{🎲})$

위의 그림은 $K = 399$일 때의 풀이의 일부입니다. $399 = 19 \times 20 + 19$입니다. 첫 번째 19를 만들 때에는 총 3개의 경로를 한 점에 집중시켜서 만들어줍니다(현재는 1열에서 가로로 뻗어나가는 부분에서 11, 1행에서 세로로 뻗어나가는 경로에서 6, 그 중간의 경로에서 2만큼을 가져와서 총 19까지를 표현 가능한 것을 볼 수 있습니다.). 두 번째 19까지는 칸 수를 잘 세어보았을 때, 정확히 한 칸이 부족해서 기둥의 폭을 2로만 설정하면 불가능합니다. 따라서 1행에서 내려오는 부분의 폭을 3까지 사용해야 합니다. 이렇게 할 경우, 세 번째 자릿수부터는 폭이 2인 기둥들로도 충분히 모든 수를 표현 가능하기 때문에 문제가 없습니다.