제1회 곰곰컵 해설

2022년 5월 14일

문제		의도한 난이도	출제자
A	치킨댄스를 추는 곰곰이를 본 임스	**Easy**	lms0806
B	인사성 밝은 곰곰이	**Easy**	lms0806
C	곰곰이의 식단관리	**Medium**	swoon
D	결전의 금요일	**Medium**	pjshwa
E	Yes or yes	**Medium**	pichulia
F	숲속에서 새 구경하기	**Hard**	pjshwa
G	합주단 곰곰	**Hard**	r4pidstart
H	곰곰이의 심부름	**Hard**	swoon
I	곰곰이와 자판기	**Hard**	pjshwa
J	보드 뒤집기 게임	**Challenging**	pjshwa
K	도박사 곰곰	**Challenging**	r4pidstart

A. 치킨댄스를 추는 곰곰이를 본 임스

`math`
출제진 의도 – **Easy**

- 제출 795번, 정답 576명 (정답률 73.21%)
- 처음 푼 사람: **gojib2002**, 0분
- 출제자: `lms0806`

A. 치킨댄스를 추는 곰곰이를 본 임스

- 누구나 풀 수 있는 문제를 의도하고 출제했습니다.
- (콜라 개수 / 2 + 맥주 개수) 와 (치킨집 치킨 개수) 중 더 작은 값이 정답입니다.

B. 인사성 밝은 곰곰이

`string`, `set`
출제진 의도 – **Easy**

- 제출 754번, 정답 335명 (정답률 45.62%)
- 처음 푼 사람: **gojib2002**, 2분
- 출제자: `lms0806`

B. 인사성 밝은 곰곰이

- ENTER가 나온 이후, 다음 ENTER가 등장하기 전까지 나오는 unique한 닉네임의 개수를 세면 됩니다.
- set을 관리하면서, ENTER가 나올 때마다 답에 set size를 더해주고 set을 비우는 식으로 구현할 수 있습니다.

C. 곰곰이의 식단 관리

`ad_hoc`, `math`
출제진 의도 – **Medium**

- 제출 557번, 정답 258명 (정답률 47.58%)
- 처음 푼 사람: **riroan**, 4분
- 출제자: swoon

C. 곰곰이의 식단 관리

- 치킨의 개수를 C, 다른 음식의 개수를 K 라 할 때, 최대로 연속된 치킨의 개수를 최소로 하려면 C 를 $K+1$ 등분 해야 합니다.
- 따라서 정답은 $\left\lceil \frac{C}{K+1} \right\rceil$ 입니다.
- 시간복잡도는 $\mathcal{O}(N)$ 입니다.

D. 결전의 금요일

`backtracking`, `knapsack`
출제진 의도 – **Medium**

- 제출 538번, 정답 135명 (정답률 29.00%)
- 처음 푼 사람: **gojib2002**, 7분
- 출제자: `pjshwa`

D. 결전의 금요일

- 여러가지 방법으로 풀 수 있는 쉬운 문제를 의도했습니다.
- 주어진 수의 집합에서, 원소를 모두 합하여 7로 나눴을 때 나머지가 4인 부분집합이 존재하는지 물어보는 문제입니다.
- 주어진 수 중 7로 나눈 나머지가 0이 아닌 수가 7개 이상일 경우, 비둘기집의 원리에 의해 부분집합의 원소 합을 7로 나눈 나머지가 4인 경우가 항상 존재합니다.
- 7개 미만일 경우 backtracking 등의 방법으로 완전 탐색을 시도해 볼 수 있습니다.
- 또는 위 관찰 없이 knapsack으로 해결할 수도 있습니다.

E. Yes or yes

`graph_traversal`
출제진 의도 – **Medium**

- 제출 235번, 정답 130명 (정답률 55.75%)
- 처음 푼 사람: **sweetiemashiro**, 9분
- 출제자: `pichulia`

E. Yes or yes

- 제목과 지문에서 알 수 있듯이, 트와이스의 노래 YES or YES 노래를 듣다가 만든 문제입니다.
- Yes or No 를 출력하는 문제는 종종 있었지만, Yes or yes 를 출력하는 문제는 본 적이 없어서, 컨셉에 잡아먹힌 문제를 하나 제작해 보았습니다.
- 불협화음 제 2 탄

E. Yes or yes

- 팬클럽 곰곰이가 있는 노드를 **포함하고** 여행이 종료된 노드의 집합을 S.
- 팬클럽 곰곰이가 있는 노드를 **제외하고** 여행이 종료된 노드의 집합을 T.
- 라고 정의했을 때,
- $S \bigcap T = \varnothing$ 인 경우 답이 "Yes"
- $S \bigcap T \neq \varnothing$ 인 경우 답이 "yes" 입니다.

E. Yes or yes

- $S \bigcap T = \varnothing$ 일 때는, 모든 정상적인 여행경로상에 팬클럽 곰곰이가 있는 노드가 최소 한 개 이상 포함되어 있음을 의미합니다.
- 만약 경로상에 팬클럽 곰곰이가 있는 노드가 한개도 없는 여행경로가 있었다면, 해당 여행경로를 통해 T 집합에 있는 노드까지 도달이 가능했을 것이기 때문입니다.
- 따라서 여행 경로로 뭘 골라도 팬클럽 곰곰이를 만나게 됩니다.
- 반대로 $S \bigcap T \neq \varnothing$ 일 때는, 팬클럽 곰곰이가 있는 노드를 지나지 않고 여행을 종료할 수 있는 방법이 있다는 것을 의미합니다.

F. 숲속에서 새 구경하기

`bruteforcing`
출제진 의도 – **Hard**

- 제출 149번, 정답 20명 (정답률 13.42%)
- 처음 푼 사람: **jjang36524**, 18분
- 출제자: `pjshwa`

F. 숲속에서 새 구경하기

- $lcm(A_v, B_v, C_v)$ 초마다 3마리 새의 행동이 반복되므로, 이 사이에 3마리 새가 모이는 경우가 있다면 그 최초 시각이 답이고, 없다면 새들은 이후로도 영원히 모이지 않습니다.
- 하지만 $lcm(A_v, B_v, C_v)$ 초까지 모든 가능한 시각에 대해 확인해보는 방법은 $\mathcal{O}\left(N^3\right)$ 이므로 $N \leq 2\,000$ 일때 너무 느립니다.
- 처음 3마리가 모이는 시각은 적어도 한 새가 자신의 주기에 처음 등장하는 시각과 항상 같다는 사실을 관찰합시다.
- 따라서 새 한 마리를 고정하고, 해당 새의 주기의 시작점마다 다른 두 마리 새가 보이는 경우가 있는지를 확인하는 식으로 답을 찾을 수 있습니다. 이 방법은 $\mathcal{O}\left(N^2\right)$ 입니다.
  - 3마리 새에 대해서 위 방법을 반복하면 됩니다.

G. 합주단 곰곰

`probability_theory`, `linearity_of_expectation`, `ad_hoc`
출제진 의도 – **Hard**

- 제출 61번, 정답 30명 (정답률 54.10%)
- 처음 푼 사람: **jjang36524**, 27분
- 출제자: `r4pidstart`

G. 합주단 곰곰

- X 를 같은 음을 연주하는 곰곰의 쌍의 수로 정의하고,
- 지시확률변수 I_p 를 p 번째 곰곰 쌍이, 같은 음을 연주하는 사건이 일어났는가를 표시한다고 정의합시다. $(1 \leq p \leq \binom{n}{2})$
- $E(X) = \sum_{p=1}^{\binom{n}{2}} E(I_p)$ 인데,
- $E(I_p) = P(I_p) = \frac{1}{k}$ 이므로,
- $E(X) = \sum_{p=1}^{\binom{n}{2}} \frac{1}{k} = \frac{n(n-1)}{2k}$ 입니다.

H. 곰곰이의 심부름

`bfs`, `math`
출제진 의도 – **Hard**

- 제출 86번, 정답 28명 (정답률 32.56%)
- 처음 푼 사람: **jthis**, 27분
- 출제자: swoon

H. 곰곰이의 심부름

- 중복을 제외한 방문 순서를 기록한 리스트를 L 이라 했을 때, 순서쌍 $(L_i, L_j)(i < j)$ 는 항상 가능합니다.
- $(L_j, L_i)(i < j)$ 가 가능한 순서쌍이 되기 위해서는 L_j 에서 L_i 로의 이동이 가능해야 합니다.
- 이는 똑같은 정점을 두 번 방문하였다는 뜻이고, S -> T, T -> H 경로에 모두 포함된 정점들은 $(L_j, L_i)(i < j)$ 가 가능해집니다.
- 두 경로에 모두 포함된 정점들의 리스트를 A 라 할 때, 답은 다음과 같습니다.
- $$\frac{n(L)(n(L)+1) + n(A)(n(A)+1)}{2}$$

H. 곰곰이의 심부름

- bfs를 돌리며 직접 카운팅하며 L과 A를 관리해준다면 $\mathcal{O}(N)$으로 문제를 해결할 수 있습니다.
- 또 다른 풀이는, S -> T와 T -> H 경로 길이의 합과 S -> H 경로 길이를 알면 $n(L)$과 $n(A)$를 바로 알 수 있다는 것에서 출발합니다.
- 만약 심부름으로 인하여 최단 경로로 도달하지 못한 경우 S -> T와 T -> H 경로 길이의 합은 S -> H 경로 길이보다 $2\times$ (추가로 방문한 정점의 개수) 만큼 길 것입니다.
- 따라서 각 경로의 길이만 알아도 문제를 풀 때 필요한 조건을 얻을 수 있습니다.

I. 곰곰이와 자판기

`dynamic_programming`, `binary_search`, `ad_hoc`
출제진 의도 – **Hard**

- 제출 77번, 정답 28명 (정답률 37.66%)
- 처음 푼 사람: **jthis**, 33분
- 출제자: `pjshwa`

- $g(i)$ 를 i 번째 차원 이동에서 음료수가 변경될 경우, 모든 차원 이동을 마치고 최종적으로 반환되는 음료수 종류로 정의합니다.
- 예제 입력을 예로 들면, $g(1) = g(2) = g(4) = 4,\ g(3) = 3$ 입니다.
- $g(i)$ 는 재귀적으로 정의할 수 있습니다. 음료수 종류 U_i 는 i 번째 차원 이동에서 V_i 로 변경되므로, $j > i, V_i = U_j$ 를 만족하는 가장 작은 j 를 구하면 $g(i) = g(j)$ 입니다. 혹은 그러한 j 가 없다면 $g(i)$ 는 그냥 V_i 입니다.
  - j 를 naive 하게 찾으면 $\mathcal{O}\left(M^2\right)$ 의 시간이 소요되므로, U_i 가 등장하는 position 들을 모두 오름차순으로 기록한 뒤 이분 탐색을 이용하여 찾아야 합니다.

- $k(1 \leq k \leq N)$ 번째 음료수에 대해, 모든 차원 이동 후 반환되는 음료수 종류는 $U_i = k$ 를 만족하는 가장 작은 i 에 대해 $g(i)$ 의 리턴값, 혹은 그러한 i 가 없다면 그냥 k 입니다. 모든 음료수에 대해 체크하면서 같은 i 에 대해 $g(i)$ 가 여러 번 호출될 수 있으므로 memoization 이 필요합니다.

J. 보드 뒤집기 게임

`math, ad_hoc`
출제진 의도 – **Challenging**

- 제출 19번, 정답 14명 (정답률 73.68%)
- 처음 푼 사람: **tlsdydaud1**, 16분
- 출제자: `pjshwa`

J. 보드 뒤집기 게임

- 2×2 사각형을 반전시키는 연산 (**뒤집기 마법**) 을 수행했을 때, board 의 모든 행과 열의 parity 가 변경되지 않는다는 사실을 관찰합시다. (invariant)
- board 에 **뒤집기 마법**을 수행하여 나올 수 있는 board 상태와 ($2^{(10^5-1)(10^5-1)}$ 가지), 특정 행 / 열 parity 를 가지는 board 상태 사이에는 bijection 을 잡을 수 있습니다. board 의 마지막 행 / 열을 제외한 모든 칸을 자유롭게 조작할 수 있음을 생각합시다.
- 이 사실을 이용하여 **뒤집기 마법**을 통해 현재와 같은 parity 를 가지는 모든 상태를 방문할 수 있고, parity 가 다른 상태는 방문할 수 없음을 보일 수 있습니다.
- 따라서 원래 board 의 행과 열의 parity 가, 목표하는 board 의 parity 와 같은지만 확인해 보면 됩니다.

K. 도박사 곰곰

`math`, `dynamic_programming`, `prefix_sum`, `combinatorics`
출제진 의도 – **Challenging**

- 제출 21번, 정답 10명 (정답률 47.62%)
- 처음 푼 사람: **sweetiemashiro**, 42분
- 출제자: `r4pidstart`

K. 도박사 곰곰

- 동일한 카드 무늬의 최대 개수가 곰곰이의 카드 조합보다 적거나, 최대 개수가 같지만 해당 무늬의 번호가 될 수 있는 최댓값이 곰곰이의 그것보다 작다면 곰곰이에게 질 수 있습니다.
- 다른 말로 표현해 보겠습니다. 곰곰이의 카드 조합에서 동일한 무늬의 최대 개수를 K 라고 하고, K 개 있는 카드 무늬 번호의 최댓값을 p 라고 하면, 당신은 1 번부터 $p-1$ 번까지의 카드는 최대 K 개 가질 수 있고, p 번부터 M 번까지의 카드는 최대 $K-1$ 개 가질 수 있습니다.

K. 도박사 곰곰

- 그렇다면 구하고자 하는 값을 다음과 같이 표현해 볼 수 있습니다.
  - $(1 + x + \cdots + x^K)^{p-1}(1 + x + \cdots + x^{K-1})^{M-p+1}$ 에서, x^N 의 계수
- 괄호 안의 각 다항식은 카드 무늬 번호와, 해당 무늬 번호의 카드를 뽑을 수 있는 최대 개수를 표현합니다.

K. 도박사 곰곰

- 다항식의 곱셈은 DP 식을 다음과 같이 정의하여 할 수 있습니다.
  - $dp[i][j]$ = i번째 다항식까지 곱했을 때, $1, x, \cdots, x^j$ 의 계수의 합
- 계수의 합으로 정의하는 이유는 누적합 테크닉을 이용하여 시간 복잡도를 $\mathcal{O}(NM)$ 으로 만들기 위함입니다.