카툰컵 Zero: ～Prologue～

dbgksdl00 dbrua1222 djeleanor2 eric00513 index ingyu1008 jbh0224 jshyun912
kirvy810 kiwiyou nflight11 pani ruykun sorohue starbucks_americano utilforever ychangseok

by

toycartoon

2024.03.02

문제		의도한 난이도	출제자
A	그게 무슨 코드니..	**Easy**	toycartoon
B	자작나무가 없소~	**Easy**	toycartoon
C	생일 축하합니다~	**Easy**	dbrua1222
D	장난을 잘 치는 토카 양	**Medium**	toycartoon
E	프랙탈 수열	**Medium**	starbucks_americano, utilforever
F	N진수 곱셈 (tiny)	**Medium**	djeleanor2
G	DP (Small)	**Medium**	jbh0224
H	만화에서 나오는 거 따라하고 그러면 안 된다	**Hard**	jshyun912
I	DP (Large)	**Hard**	jbh0224
J	정렬된 프랙탈 수열	**Challenging**	starbucks_americano, utilforever
K	N진수 곱셈 (HUGE)	**Challenging**	djeleanor2

A. 그게 무슨 코드니..

#implementation, #string

출제진 의도 – **Easy**

- 제출 832번, 정답 244명 (정답률 30.529%)
- 처음 푼 사람: **riroan**, 51초
- 출제자: **toycartoon**

A. 그게 무슨 코드니..

- 큰따옴표를 사용하는 문자열 출력 문제입니다.
- 문자열의 시작과 끝 문자열이 "인 경우에는 더 이상의 큰따옴표가 없습니다.
- 따라서 이 경우에는 길이가 3 이상인 경우 큰따옴표를 제외한 문자열을 출력하면 쉽게 통과됩니다.
- 아닌 경우에는 CE를 출력하면 됩니다.
- 문자열이 큰따옴표로 시작하거나 끝나지 않을 수도 있습니다. 이 경우에는 반드시 CE를 출력해야 합니다.
  - 대회 중에 이 사실을 놓친 코드가 정말 많았습니다.

A번 특별상

그게 진짜 무슨 코드니..

- ✓ 가장 먼저 컴파일 에러를 발생시키는 코드 제출 - `ferf99`
- ✓ 제출번호 74290388, 411B, 5분 2초

B. 자작나무가 없소～

#implementation, #string

출제진 의도 – **Easy**

- 제출 374번, 정답 197명 (정답률 55.080%)
- 처음 푼 사람: **riroan**, 2분
- 출제자: **toycartoon**

B. 자작나무가 없소~

- _ 기준으로 문자열을 나누어서 S가 포함되어 있는 경우 N만큼 더해주면 쉽게 풀 수 있습니다.
- S_S와 같이 중복해서 S가 등장하는 경우, N을 한번만 더 해줘야 함에 유의해주세요.
- 별해로 _(아이템의 이름)_과 _S_를 비교하는 방법도 있습니다.

B번 특별상

자작나무 숲이 없소～

- ✓ 가장 많은 WA 이후 AC - **isekaijoucho**
- ✓ 최종제출번호 74292231, 7회, 34분 35초

C. 생일 축하합니다~

`Interactive,#ad_hoc`

출제진 의도 – **Easy**

- 제출 183번, 정답 93명 (정답률 51.913%)
- 처음 푼 사람: **infinity85384856**, 4분 54초
- 출제자: **dbrua1222**

C. 생일 축하합니다~

- 간단한 인터랙티브 문제입니다.
- 인터랙터는 생일인 사람을 생일이 아니라고 최대 한 번 거짓말 하므로, 생일인 사람의 이름을 두 번 질문하면 두 질문중 적어도 하나의 답은 1 입니다.
- 두 번 질문해서 1 이 나올 때 바로 출력하거나, 입력받은 두 답변에 대해 `or`, `+` 등 둘 중의 하나가 1 이란 것을 알 수 있는 연산을 통해 정답을 알아내면 됩니다.

C번 특별상

그건 dbrua1222 님이 아니라 제 생일이에요

- ✓ 804B에 가깝게 가장 먼저 제출 - `chleee`
- ✓ 제출번호 74292480, 804B, 38분 58초

D. 장난을 잘 치는 토카 양

`#binary_search`, `#simulation`, `#math`

출제진 의도 – **Medium**

- 제출 355번, 정답 32명 (정답률 9.014%)
- 처음 푼 사람: **iktk**, 19분
- 출제자: **toycartoon**

D. 장난을 잘 치는 토카 양

- 이분탐색을 이용하여 토카가 집에 들어가기 위해 필요한 이동 횟수 T를 구합니다.
- $(0, T]$ 내에 (돌돌이 위치) $-$ (토카 위치)의 부호가 바뀌는 때가 있는지 판단하여 맞는 해를 출력하면 됩니다.
- 이때 유의할 사항은, **첫 이동 전에는 돌돌이가 토카를 잡지 않는다는 점입니다.**

D. 장난을 잘 치는 토카 양

- 별해로, $K = 0$이라면 수학으로 계산하고, 아니라면 나이브한 시뮬레이션으로 계산하여 구하는 방법이 있습니다.
  - $K = 0$인 경우 돌돌이와 토카의 이동거리는 이동 횟수 t에 대한 1차식으로 나타낼 수 있습니다.
  - $K \neq 0$인 경우 돌돌이의 이동거리는 이동 횟수에 대한 1차식, 토카의 이동거리는 이동 횟수에 대한 2차식입니다. 따라서, 시뮬레이션을 하는 시간 범위가 최대 $\sqrt{2A}$로 줄어들게 됩니다.

D번 특별상

Redbull gives me wings

- ✓ AC 코드 중 실행 시간이 제일 빠른 코드(같다면 선착순) - `menborong`
- ✓ 제출번호 74291601, 1508B, 0 ms, 23분 20초

E. 프랙탈 수열

#math, #combinatorics, #ad_hoc

출제진 의도 – **Medium**

- 제출 74번, 정답 42명 (정답률 56.757%)
- 처음 푼 사람: **dabbler1**, 23분
- 출제자: **starbucks_americano utilforever**

E. 프랙탈 수열

- 어떤 정수 i가 존재하여, $1 \leq i \leq N$이고 $a_i > N$이라면, $b_N > N, c_N = 0$이기 때문에 $b_N \neq c_N$이므로, 이러한 수열 A는 문제의 조건을 만족하지 않습니다.
- 따라서 $\max(A) \leq N$이므로 $B = [1, 2, \cdots, N]$입니다.
- $B = [1, 2, \cdots, N]$이기 위해서는 수열 A의 각 항에 1부터 N까지의 정수가 각각 한 번씩만 대응되어야 하므로 경우의 수는 $N!$입니다.

F. N진수 곱셈 (tiny)

#math, #string, #parsing, #number_theory, #implementation

출제진 의도 – **Medium**

- 제출 87번, 정답 13명 (정답률 22.059%)
- 처음 푼 사람: **dabbler1**, 46분
- 출제자: **djeleanor2**

F. N진수 곱셈 (tiny)

- N 진법으로 표현된 A, B 를 다항식으로 생각하면, 두 수를 곱하는 연산은 다항식의 곱셈으로 생각할 수 있습니다. 이 때, 각 자리에 있는 문자에 해당하는 숫자가 계수가 됩니다.
- 다항식을 곱셈한 이후에는 계수를 $0 \leq x < |N|$ 의 범위에 맞게 받아올림해야 합니다.
- 별해로 Python이나 Ruby 등 임의 정밀도 정수를 지원하는 언어의 경우 A와 B를 정수로 변환해 곱한 후 N 진법으로 변환하는 방법도 있습니다.

F. N진수 곱셈 (tiny)

구현 시 유의사항

- 제일 마지막에 오는 문자에 해당하는 숫자가 상수항의 계수가 되고, 제일 첫번째에 오는 문자에 해당하는 숫자가 최고차항의 계수가 됩니다.
- 음수 진법의 경우 각 언어별로 나눗셈을 처리하는 방식이 다릅니다.
- 결과를 출력할 때 음수 부호는 다음의 조건을 모두 만족할 때만 붙여야합니다.
  - $N > 0$.
  - $A < 0$ 또는 $B < 0$ 둘 중 하나만 만족.
  - $A \times B \neq 0$.
- 음수 진법일 경우 곱한 결과를 표시할 때 (A의 길이) + (B의 길이) 만큼만 배열을 할당할 경우, 최고차항에 해당하는 자리가 음수일 수 있습니다. 이 때는 배열을 한 칸 더 할당해야합니다.

F번 특별상

Fast and Furious

- 언어 그룹 Python으로 정답을 맞힌 사람 중 실행 시간 1등 - **iktk**
- 제출번호 74293225, 실행 시간 152ms, 제출 시간 51분 35초

G. DP(Small)

#dp

출제진 의도 – **Medium**

- 제출 69번, 정답 26명 (정답률 39.130%)
- 처음 푼 사람: **pretty_pi**, 8분
- 출제자: **jbh0224**

G. DP(Small)

- 먼저, i번째 원소를 끝으로 하는 LIS의 길이를 구합니다. 이를 $DP1_i$라고 하겠습니다.
- 그 후, i번째 원소로 시작하는 LIS의 길이를 구합니다. 이를 $DP2_i$라고 하겠습니다.
- 그러면 정답은 $DP1_i + DP2_i - 1$이 됩니다.
- 이 문제는 제한이 작은 문제로, 각 LIS를 구하는 데에 $\mathcal{O}(n^2)$의 시간이면 충분합니다.

H. 만화에서 나오는 거 따라하고 그러면 안 된다

#bfs #dijkstra

출제진 의도 – **Hard**

- 제출 59번, 정답 10명 (정답률 16.949%)
- 처음 푼 사람: **cinador**, 63분
- 출제자: **jshyun912**

H. 만화에서 나오는 거 따라하고 그러면 안 된다

- 문제에서 구해야 하는 것을 정리하면, 한별 선배가 등교하는 경로, 토카가 각 은행나무까지 가는 데 걸리는 시간으로 나눌 수 있습니다.
- 한별 선배가 등교하는 경로는 은행나무와 다음 은행나무까지 가는 시간을 고려하지 않기 때문에 BFS를 통하여 구할 수 있습니다.
- 학교 앞 은행나무에서 BFS를 진행해 각 은행나무에서 몇 개의 나무를 거쳐야 학교에 도착할 수 있는지 구합니다.
- 그다음 BFS에서 구한 값을 바탕으로 한별 선배 집 앞 은행나무에서부터 한별 선배가 가는 조건에 따라 이동하면 한별 선배의 경로를 구할 수 있습니다.

H. 만화에서 나오는 거 따라하고 그러면 안 된다

- ✓ 토카가 각 은행나무까지 가는 데 걸리는 시간은 데이크스트라를 통해 구할 수 있습니다.
- ✓ 마지막으로 한별 선배의 이동 경로에 있는 은행나무들을 토카가 각 은행나무까지 가는 데 걸리는 시간과 대조하여 정답을 구할 수 있습니다.

H번 특별상

한별이
대신귀
여운탕
후루를
드리겠
습니다

- H번 정답자 중 특별상을 받은 사람을 제외하고 랜덤 - **seonah**

I. DP(Large)

`#lis, #dp`

출제진 의도 – **Hard**

- 제출 33번, 정답 21명 (정답률 63.636%)
- 처음 푼 사람: **bnb2011**, 8분
- 출제자: **jbh0224**

I. DP(Large)

- G번 문제와 같은 dp를 이용하면 됩니다.
- 이 문제는 제한이 큰 문제로, 각 LIS를 구하는 데에 $\mathcal{O}(n \log n)$의 시간이 필요합니다.

I번 특별상

$DYNAMIC$ 포라니

- ✓ AC 코드 중 언어별 시간 제한을 고려하여 실행 시간/시간 제한이 가장 1에 가까운 코드(같다면 선착순) - **tapris**
- ✓ 제출번호 74297937 , 471B, 13524 ms, 143분 22초

J. 정렬된 프랙탈 수열

#dp, #exponential_by_squaring, #ad_hoc, #combinatorics

출제진 의도 – **Challenging**

- 제출 13번, 정답 2명 (정답률 15.385%)
- 처음 푼 사람: **pretty_pi**, 102분
- 출제자: **starbucks_americano utilforever**

J. 정렬된 프랙탈 수열

- 우선, 고정된 값이 없는 상태에서의 문제를 풀어봅시다. 다음의 두 개의 보조정리를 생각할 수 있습니다.
- 보조정리 1 : $a_i = C$ 이고, $a_j = C$ 이면, $a_i = a_{i+1} = \cdots = a_j = C$ 이다.
  - A 가 비내림차순이므로, $C = a_i \leq a_{i+1} \leq \cdots \leq a_j = C$ 에서 원하는 결론을 얻습니다.
  - 어떤 k 에 대해 $a_k = C$ 이라면 k 를 포함하는 어떤 폐구간 $[i, j]$ 에 대해 $a_i = a_{i+1} = \cdots = a_j = C$ 입니다.
  - 따라서, 이 폐구간의 크기 $(= j - i + 1)$ 을 최대로 하는 폐구간 $[x, y]$ 가 유일하게 존재하고, 이 때의 구간 $[x, y]$ 를 그룹 C 라 정의합시다.

J. 정렬된 프랙탈 수열

- 보조정리 2 : 수열 $B(b_i = a_{a_i})$ 가 존재하기 위한 조건은, 그룹 C 가 존재하고 그 구간이 $[x, y]$ 라면, $x \leq C \leq y$ 라는 것입니다.
  - 귀류법을 사용하여 증명합니다. 일반성을 잃지 않고 $C > y$ 인 경우를 살펴봅니다. 모든 $i \in [x, y]$ 에 대해 $b_i = a_{a_i} = a_C$ 인데, $C = a_i = b_i = a_C \neq C (\because C \notin [x, y])$ 에서 모순입니다.
  - Note : 보조정리 2에 의해 $i \in [x, y]\ s.t.\ a_x = a_{x+1} = \cdots = a_y = a_i$
    $\therefore$ 그룹 C 에 대해 $b_i = a_{a_i} = a_C$ 로 조건 만족
  - 또한, 수열 A 는 (x, y, C) 에 대해 유일하므로 위의 조건에 맞게 그룹을 배정하는 문제로 환원시킬 수 있습니다.

J. 정렬된 프랙탈 수열

- 이제, 위의 조건에 맞춰 수들을 그룹 짓는 경우의 수를 생각합시다.
- $DP[i] =$ 크기 i인 구간을 그룹화하는 경우의 수로 정의합니다.
- $DP[i+1]$을 $DP[i], \cdots DP[0]$으로 나타낼 수 있습니다. 이는 $i+1$이 속하는 그룹에 따라 나누어 생각할 수 있습니다.
- $DP[i+1] = \sum_{k=0}^{i} DP[k] \times (i+1-k)$를 얻습니다.

J. 정렬된 프랙탈 수열

- 여기서 $S[i] = DP[0] + DP[1] + \cdots + DP[i]$ 로 정의합니다.
- 그러면
  식 $DP[i] - DP[i-1] = DP[i-1] + S[i-2]$ 에서
  식 $DP[i-1] - DP[i-2] = DP[i-2] + S[i-3]$ 을 빼면
  $DP[i] - 3DP[i-1] + DP[i-2] = 0$ 을 얻습니다.
- 선형 점화식의 일반항은 행렬 거듭제곱을 통해 $\mathcal{O}(\log N)$ 에 구할 수 있습니다.
- 고정된 K 값에 대해서는 답이 0 이 되어버리거나, 독립적으로 계산할 수 있는 구간을 적절히 $\mathcal{O}(K)$ 에 찾을 수 있으므로, 시간복잡도 $\mathcal{O}(K \log N)$ 안에 답을 구할 수 있습니다.

J번 특별상

수열과 아메리카노

- ✓ 처음으로 AC를 받는 코드를 제출 - **`pretty_pi`**
- ✓ 제출번호 74295847, 2689B, 4ms, 102분 52초

K. N진수 곱셈 (HUGE)

#math, #string, #parsing, #number_theory, #implementation, #FFT

출제진 의도 – **Challenging**

- 제출 60번, 정답 3명 (정답률 6.780%)
- 처음 푼 사람: **snrnsidy**, 101분
- 출제자: **djeleanor2**

K. N진수 곱셈 (HUGE)

- F와 아이디어는 비슷하지만, A와 B의 길이 제한 때문에 FFT나 DFT를 활용해야만 합니다.
- 이때, 계수의 최댓값은 $92 \times 92 \times 3\,000\,000 > 2^{32}$ 입니다.
- 따라서, DFT를 활용하는 경우 2^{32} 보다 작은 소수 2개를 활용하거나 $92 \times 92 \times 3\,000\,000$ 보다 크거나 2^{64} 보다 작은 소수 1개를 활용해야합니다.
- 또한, DFT를 활용하는 경우, 최대로 수용 가능한 다항식 차수가 $6\,000\,000$을 넘겨야합니다. 이를 만족하는 소수는 $998\,244\,353$, $1\,107\,296\,257$ 등이 있습니다.
- FFT를 활용하는 경우에는 실수 오차로 인해 틀릴 가능성이 있으므로 `long double` 등 정밀도가 높은 자료형을 활용하는 것이 강력히 권장됩니다.

K. N진수 곱셈 (HUGE)

- ✓ 만약 이걸로도 시간 제한에 걸리는 경우 N^3 진법으로 변환을 시도하는 방법이 있습니다.
- ✓ N^3 진법으로 변환할 경우 계수의 최댓값과 최솟값은 다음과 같습니다.
  - 최댓값: $N = 93$ 일 때, $(93^3 - 1)^2 \times 1\,000\,000$.
  - 최솟값: $N = -93$ 일 때, $(92 \times 93^2 + 92) \times (-92 \times 93) \times 1\,000\,000$.

  적당한 소수를 잘 고르면, 2^{32} 보다 작은 소수 2 개를 활용한 DFT로 연산 가능합니다.
- ✓ DFT를 활용하는 경우에는 음수 계수 처리에 주의해야 합니다.
- ✓ 계수의 범위를 N 진법으로 표현할 때 3 자리가 되도록 맞춰야합니다.
  - N 이 양수일 경우, 계수의 범위는 $0 \le x < N^3$ 입니다.
  - N 이 음수일 경우, 계수의 범위는 $-N^2 - N \le x < -N^3 - N^2 - N$ 입니다.
- ✓ 마지막으로 N 진법으로 변환할 때 부호를 제외한 맨 앞자리에 ! 가 오지 않게 주의해야합니다.